

## 7-1 邏輯、集合與計數原理(常考題型 1)

設(A)充分，(B)必要，(C)充要，(D)非充分且非必要，請將代號(A)(B)(C)(D)填入下列空格。

(1) “ $x=2$ ” 為 “ $x^2+3x-10=0$ ” 的\_\_\_\_\_條件。

(2) “ $-1 \leq x \leq 4$ ” 為 “ $x > 2$ ” 的\_\_\_\_\_條件。

(3) “ $a^2=b^2$ ” 為 “ $a=b$ ” 的\_\_\_\_\_條件。

(4) “四邊形  $ABCD$  為菱形” 為 “四邊形  $ABCD$  的對角線互相垂直平分” 的\_\_\_\_\_條件。

1. 答案：(1) (A)；(2) (D)；(3) (B)；(4) (C)

解析：

(1) 因為 “ $x=2$ ”  $\Rightarrow$  “ $x^2+3x-10=0$ ”，但是 “若  $x^2+3x-10=0$ ，則  $x=2$ ” 為偽命題，反例是  $x=-5$ ，故 “ $x=2$ ” 為 “ $x^2+3x-10=0$ ” 的充分條件，填入(A)。

(2) “若  $-1 \leq x \leq 4$ ，則  $x > 2$ ” 為偽命題，反例是  $x=0$ ；“若  $x > 2$ ，則  $-1 \leq x \leq 4$ ” 為偽命題，故填入(D)。

(3) “若  $a^2=b^2$ ，則  $a=b$ ” 為偽命題，反例是  $a=1$ ， $b=-1$ ；“若  $a=b$ ，則  $a^2=b^2$ ” 為真命題，故 “ $a^2=b^2$ ” 為 “ $a=b$ ” 的必要條件，故填入(B)。

(4) 因為四邊形  $ABCD$  為菱形  $\Leftrightarrow$  四邊形  $ABCD$  的對角線互相垂直平分，所以 “四邊形  $ABCD$  為菱形” 為 “四邊形  $ABCD$  的對角線互相垂直平分” 的充要條件，故填入(C)。

## 7-1 邏輯、集合與計數原理(常考題型 2)

請用列舉法表示下列各集合：

(1)  $A = \{x \mid x \text{ 為正整數且 } x \leq 4\}$  .

(2)  $B = \{x \mid x \geq 1 \text{ 且 } x \leq 1\}$  .

(3)  $C = \{x \mid x^3 + 1 = 0 \text{ 且 } x \text{ 為實數}\}$  .

(4)  $D = \{x \mid x^2 - 5x - 6 = 0 \text{ 且 } x^2 - 9 = 0\}$  .

(5)  $E = \{x \mid x \text{ 為整數且 } |x| \leq 2\}$  .



解答

(1)  $\{1, 2, 3, 4\}$ ; (2)  $\{1\}$ ; (3)  $\{-1\}$ ; (4)  $\emptyset$ ; (5)  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

## 7-1 邏輯、集合與計數原理(常考題型 3)

請寫出集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  的所有部分集合。



解答

見解析

解析

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$ , 共有  $2^4 = 16$  個。

## 7-1 邏輯、集合與計數原理(常考題型 4)

設  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  為一字集, 且  $A = \{1, 2, 4, 5, 8\}$ ,  $B = \{1, 2, 5, 7, 9\}$ , 求

(1)  $A' =$  \_\_\_\_\_ .      (2)  $B' =$  \_\_\_\_\_ .

(3)  $(A \cup B)' =$  \_\_\_\_\_ .      (4)  $A' \cap B' =$  \_\_\_\_\_ .



解答

(1)  $\{3, 6, 7, 9, 10\}$ ; (2)  $\{3, 4, 6, 8, 10\}$ ; (3)  $\{3, 6, 10\}$ ; (4)  $\{3, 6, 10\}$

解析

(1)  $A' = \{3, 6, 7, 9, 10\}$  . (2)  $B' = \{3, 4, 6, 8, 10\}$  .

(3)  $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9\}$  .  $(A \cup B)' = \{3, 6, 10\}$  .

(4)  $A' \cap B' = \{3, 6, 10\}$  .



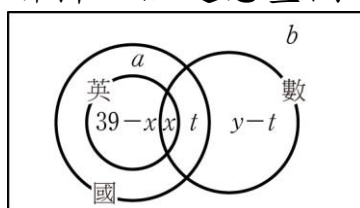
## 7-1 邏輯、集合與計數原理(常考題型 7)

某班級 50 位學生，段考國文、英文、數學及格的人數分別為 45、39、34 人，且英文及格的學生國文也都及格。現假設數學和英文皆及格的有  $x$  人，數學及格但英文不及格的有  $y$  人。請選出正確的選項。

- (A)  $x+y=39$   
 (B)  $y \leq 11$   
 (C) 三科中至少有一科不及格的學生有  $39-x+y$  人  
 (D) 三科中至少有一科不及格的學生最少有 11 人  
 (E) 三科中至少有一科不及格的學生最多有 27 人

答案：(B)(E)

解析：依題意畫圖如附圖：



(A)  $x+t+(y-t)=34 \Rightarrow x+y=34$ 。

(B) 因國文及格有 45 人最多，故  $0 \leq b \leq 5$ ，

又  $a+t=6$ ， $t \geq 0 \Rightarrow 0 \leq a \leq 6$ ，

於是  $0 \leq a+b \leq 11$ ，得  $y=50-39-(a+b)=11-(a+b)$

$\Rightarrow 0 \leq y \leq 11$ 。

(C)(D)(E)

因英文及格者國文必及格，故三科都及格者有  $x$  人，

而至少有一科不及格者有  $(50-x)$  人，

因  $x+y=34$ ， $0 \leq y \leq 11$ ，故  $23 \leq x \leq 34$ ，

於是  $16 \leq 50-x \leq 27$ ，即三科中至少有一科不及格者最少有 16 人，

最多 27 人。故選(B)(E)。

## 7-1 邏輯、集合與計數原理(常考題型 8)

全班 40 位同學解二題數學問題，結果解出第一題者有 30 人，解出第二題者有 22 人，兩題皆解出者有 18 人。選出正確的選項：



- (1)兩題皆未解出者有 6 人
- (2)僅解出第一題沒有解出第二題者有 12 人
- (3)僅解出第二題沒有解出第一題者有 12 人
- (4)至少解出一題者有 30 人
- (5)僅解出一題者有 16 人。

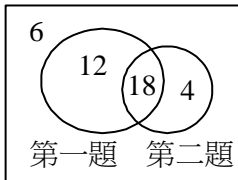
【松山高中月考】

解答

125

解析

由圖知：(1)(2)(5)為正確。



## 7-1 邏輯、集合與計數原理(常考題型 9)

自然數 7200，則

- (1) 因數共有 54 個
- (2) 正因數和為 25389
- (3) 正因數中為完全平方數的有 12 個
- (4) 正因數為完全平方數的和為 5460
- (5) 正因數為完全立方數的和為 8。



【家齊女中月考】

**解答** 234

**解析**

$$(1) \times : 7200 = 2^5 \times 3^2 \times 5^2,$$

$$\therefore \text{因數個數為 } 2(5+1)(2+1)(2+1) = 108.$$

$$(2) \circ : \text{正因數和為 } (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1 + 5^2) = 63 \times 13 \times 31 = 25389.$$

$$(3) \circ : \begin{cases} 2^0, 2^2, 2^4 \\ 3^0, 3^2 \\ 5^0, 5^2 \end{cases}, \therefore 3 \times 2 \times 2 = 12.$$

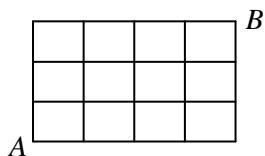
$$(4) \circ : (2^0 + 2^2 + 2^4)(3^0 + 3^2)(5^0 + 5^2) = 21 \times 10 \times 26 = 5460.$$

$$(5) \times : (2^0 + 2^3) \times 3^0 \times 5^0 = 9.$$

故選(2)(3)(4)。

## 7-1 邏輯、集合與計數原理(常考題型 10)

如圖，依下列規則從 A 走到 B，求其方法數：可以走 $\uparrow \rightarrow \downarrow$ 且不重複走，則有\_\_\_\_\_種走法。



【建國中學月考】

**解答** 256

**解析**

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256.$$

## 7-1 邏輯、集合與計數原理(常考題型 11)

將 100 元鈔票換成 50 元、10 元、5 元、1 元的硬幣，則

(1) 50 元硬幣至少要 1 個的換法有\_\_\_\_\_種。

(2) 不含 1 元硬幣的換法有\_\_\_\_\_種。

【北一女中月考】



解答

(1) 37; (2) 18

解析

(1) ① 一個 50  $\Rightarrow$  設 10 元  $x$  個，5 元  $y$  個，1 元  $z$  個，則  $10x + 5y + z = 50$ ,

$x$	0	1	2	3	4	5
$y$	0~10	0~8	0~6	0~4	0~2	0
$z$	50~0	40~0	30~0	20~0	10~0	0

共  $11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 36$  種。

② 二個 50  $\Rightarrow$  1 種  $\therefore$  所求為  $36 + 1 = 37$  種。

(2) 設 50 元  $x$  個，10 元  $y$  個，5 元  $z$  個，則  $50x + 10y + 5z = 100$

$\Rightarrow 10x + 2y + z = 20$ ,

$x$	0	1	2
$y$	0~10	0~5	0
$z$	20~0	10~0	0

共  $11 + 6 + 1 = 18$  種。

## 7-1 邏輯、集合與計數原理(常考題型 12)

一辦公室有五個門，甲乙兩人分別由不同的門進入再由不同的門出去，且每人不可由同一門進出，則有\_\_\_\_\_種走法。

答案：260

解析：(1) 甲乙進入有  $5 \times 4 = 20$  (種) 方法

(2) 甲乙二人出去方法有

(i) 甲由乙進入之門出去，有  $1 \times 4 = 4$  (種)

(ii) 甲不由乙進入之門出去，有  $3 \times 3 = 9$  (種)

故甲，乙兩人出去有  $4 + 9 = 13$  (種) 方法

由(1)(2)知，甲乙兩人進出方法有  $20 \times 13 = 260$  (種)

## 7-1 邏輯、集合與計數原理(常考題型 13)

某公司生產多種款式的「阿民」公仔，各種款式只是球帽、球衣或球鞋顏色不同。其中球帽共有黑、灰、紅、藍四種顏色，球衣有白、綠、藍三種顏色，而球鞋有黑、白、灰三種顏色。公司決定紅色球帽不搭配灰色的鞋子，而白色球衣則必須搭配藍色的帽子，至於其他顏色間的搭配就沒有限制。在這些配色的要求之下，最多可有 \_\_\_\_\_ 種不同款式的「阿民」公仔。

答案：25

解析： $\Rightarrow$  共有  $6+6+4+9=25$ (種)

## 7-1 邏輯、集合與計數原理(常考題型 14)

1. 在一次籃球比賽中，共有  $n$  支隊伍參加比賽，比賽最後一定要分出勝負，沒有平手收場的情況。若比賽規則採雙敗淘汰制(即任一隊只要輸兩場比賽就被淘汰出局)，從開始比賽到產生冠軍，總共進行了 23 場比賽，試問  $n=$  \_\_\_\_\_。

1. 答案：12

解析：雙敗淘汰 $\Rightarrow$ 冠軍可能零敗或一敗，且必須淘汰  $n-1$  支隊伍才能產生冠軍。

(i) 零敗：共有  $(n-1)+(n-2)+1=2n-2$  場  
 $\Rightarrow 2n-2=23 \Rightarrow n=\frac{25}{2}$ (不合)。

(ii) 一敗：共有  $(n-1)+(n-1)+1=2n-1$  場  
 $\Rightarrow 2n-1=23 \Rightarrow n=12$ 。

故  $n=12$ 。



## 7-1 邏輯、集合與計數原理(常考題型 15)

某地區的車牌號碼共六碼，其中前兩碼為  $O$ 、 $R$ 、 $Z$  以外的英文大寫字母，後四碼為 0 到 9 的阿拉伯數字，但規定不能連續出現三個 4，試求所有第一碼為  $A$  且最後一碼為 4 的車牌號碼個數為\_\_\_\_\_。

答案：22770

解析：  $A \square - \square \square \square 4$

↑      ↑

①  $23 \times 10 \times 10 \times 9$  (不是 4) = 20700

②  $23 \times 10 \times 9 \times 1$  (是 4) = 2070

① + ② = 22770

## 7-1 邏輯、集合與計數原理(常考題型 16)

從 1 到 5000 的自然數中，是平方數或是立方數的有\_\_\_\_\_個。

答案：83

解析： $1 = 1^2 < 70^2 = 4900 < 5000$ ，平方數有 70 個；

$1 = 1^3 < 17^3 = 4913 < 5000$ ，立方數有 17 個；

$1 = 1^6 < 4^6 = 4096 < 5000$ ，是立方數也是平方數的有 4 個；

則是立方數或平方數的有  $70 + 17 - 4 = 83$  (個)

## 7-1 邏輯、集合與計數原理(常考題型 17)

小於、等於 1000 的自然數中，為完全平方數或完全立方數的有_____個。	
--	--

答案：38

解析： $1 \leq a^2 \leq 1000 \Rightarrow 1 \leq a \leq 31$ ， $1 \leq b^3 \leq 1000 \Rightarrow 1 \leq b \leq 10$

$1 \leq c^6 \leq 1000 \Rightarrow 1 \leq c \leq 3 \Rightarrow$  有  $31+10-3=38$ (個)