

10-2 三角函數的圖形 (常考題型 1)

畫出函數 $y = 2\sin(3x + \frac{\pi}{6}) + 2$ 的圖形，並求其週期、最大值及最小值。



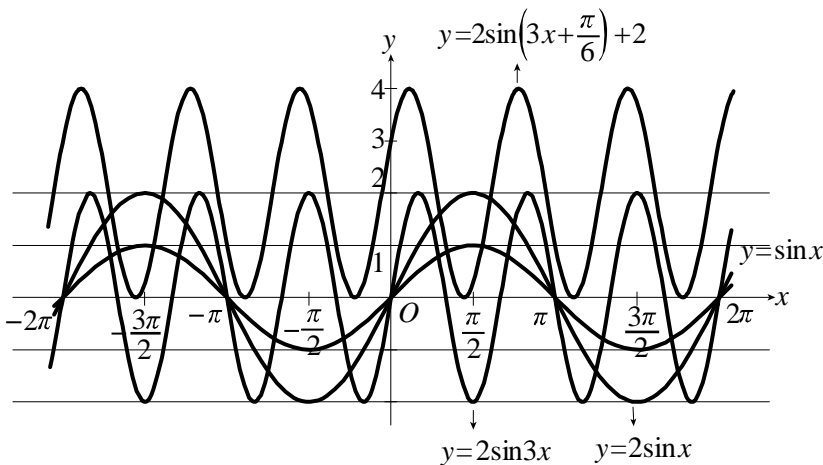
解答

見解析

解析

$y = 2\sin(3x + \frac{\pi}{6}) + 2$ 改寫為 $y = 2\sin[3(x + \frac{\pi}{18})] + 2$

$y = \sin x \xrightarrow{\text{鉛直方向 拉伸2倍}} y = 2\sin x \xrightarrow[\text{壓縮}\frac{1}{3}\text{倍}]{\text{水平方向}} y = 2\sin 3x \xrightarrow[\text{向上平移2單位}]{\text{向左平移}\frac{\pi}{18}\text{單位}} y = 2\sin[3(x + \frac{\pi}{18})] + 2$



\therefore 週期為 $\frac{2\pi}{3}$ ，最大值為 4，最小值為 0。

10-2 三角函數的圖形 (常考題型 2)

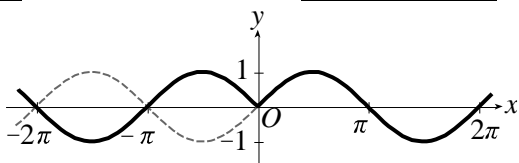
試作 $y = \sin|x|$ 的圖形，並判斷此函數是否為週期函數。



解答

圖見解析，否

解析



當 $x \geq 0$ 時， $y = \sin x$ ，

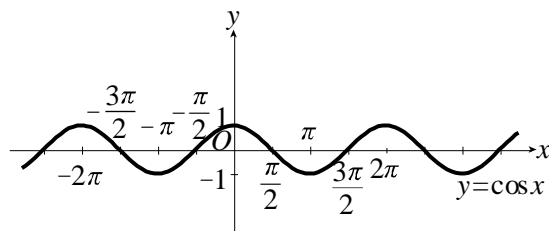
當 $x < 0$ 時， $y = \sin|x| = \sin(-x) = -\sin x$ ，

其圖形如上，

函數圖形並非週期函數。

10-2 三角函數的圖形 (常考題型 3)

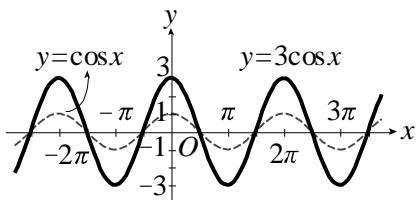
利用 $y = \cos x$ 的圖形畫出 $y = -1 + 3\cos(4x - \frac{\pi}{2})$ 的圖形，並求其週期、最大值及最小值。



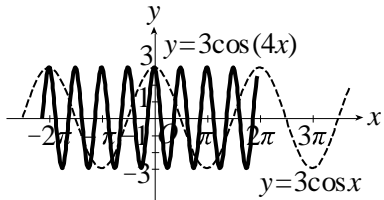
解答 (1) 圖見解析，週期 $\frac{\pi}{2}$ ，最大值 2，最小值 -4

解析 (1) 由 $y = -1 + 3\cos(4x - \frac{\pi}{2})$ ，得 $\frac{y+1}{3} = \cos(4(x - \frac{\pi}{8}))$ ，知若點 (x_0, y_0) 在 $y = \cos x$ 圖形上，則 $(\frac{1}{4}x_0 + \frac{\pi}{8}, 3y_0 - 1)$ 在 $y = -1 + 3\cos(4x - \frac{\pi}{2})$ 圖形上，表示以 $y = \cos x$ 的圖形為基準，透過下列的操作即可得 $y = -1 + 3\cos(4x - \frac{\pi}{2})$ 。

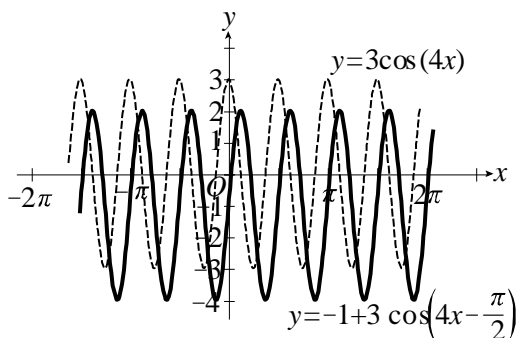
① $y = \cos x$ 以 x 軸為基準線伸縮 3 倍，得 $y = 3\cos x$ ；



② $y = 3\cos x$ 以 y 軸為基準線伸縮 $\frac{1}{4}$ 倍，得 $y = 3\cos(4x)$ ；



③ $y = 3\cos(4x)$ 往右平移 $\frac{\pi}{8}$ 單位，往下平移 1 單位， $y = -1 + 3\cos(4x - \frac{\pi}{2})$ ，



故函數 $y = -1 + 3\cos(4x - \frac{\pi}{2})$ 的週期為 $\frac{\pi}{2}$ ，最大值為 2，最小值為 -4。

10-2 三角函數的圖形 (常考題型 4)

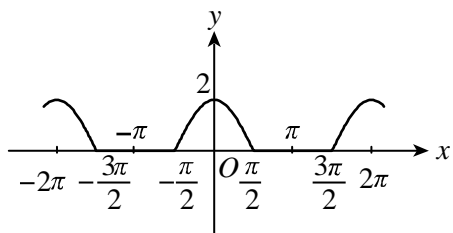
描繪下列各函數的圖形，並求其週期、最大值及最小值：

(1) $y = \cos x + |\cos x|$.



解答 (1)圖見解析，週期 2π ，最大值為 2，最小值為 0

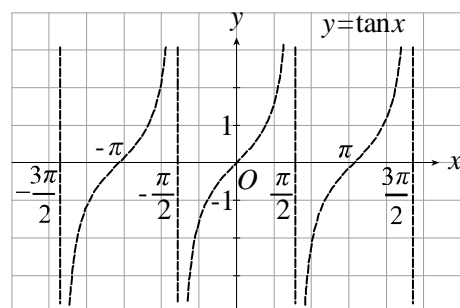
(1)因為 $y = \cos x + |\cos x| = \begin{cases} 2\cos x, & \text{若 } \cos x > 0 \\ 0, & \text{若 } \cos x < 0 \end{cases}$ ，所以 $y = \cos x + |\cos x|$ 的圖形如圖：



故其週期為 2π ，最大值為 2，最小值為 0 .

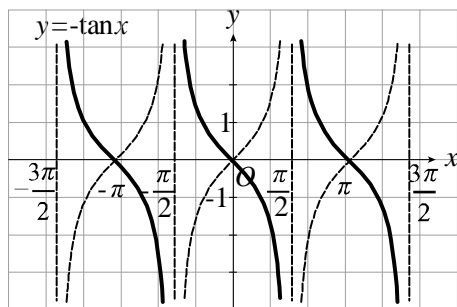
10-2 三角函數的圖形 (常考題型 5)

畫出函數 $y = -\tan x$ 的圖形，並求其週期 .



解答 圖見解析，週期 π

解析 對任意實數 x ， $y = -\tan x$ 的函數值都是 $y = \tan x$ 的 -1 倍，可得 $y = -\tan x$ 的圖形，如下圖所示 .



故函數 $y = -\tan x$ 的週期是 π .

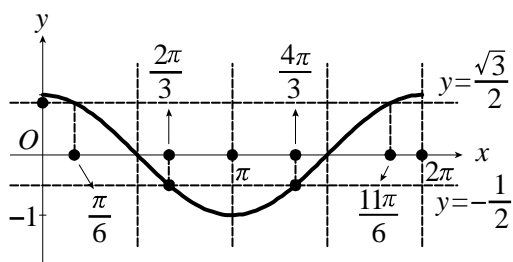
10-2 三角函數的圖形 (常考題型 6)

設 $0 \leq x < 2\pi$, 則滿足不等式 $-\frac{1}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 之 x 的範圍為何?
 (提示: 可考慮 $y = \cos x$ 在 $0 \leq x < 2\pi$ 之函數圖形)



解答 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{11\pi}{6}$

解析 描繪 $y = \cos x$ 圖形



由圖知 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{11\pi}{6}$.

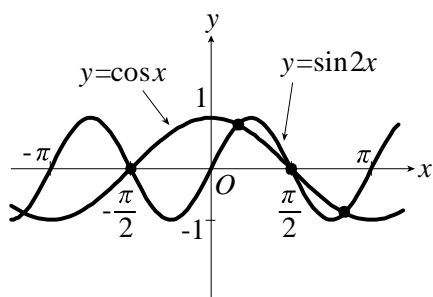
10-2 三角函數的圖形 (常考題型 7)

在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 範圍內, 函數 $y = \sin 2x$ 與 $y = \cos x$ 的圖形有幾個交點?



解答 4 個

解析 如下圖 .



因此, 兩圖形 $y = \sin 2x$ 與 $y = \cos x$ 有 4 個交點 .

10-2 三角函數的圖形 (常考題型 8)

比較 $a = \cos 1$, $b = \cos 2$, $c = \cos 3$, $d = \sin 4$, $e = \sin 5$ 之大小順序為_____。

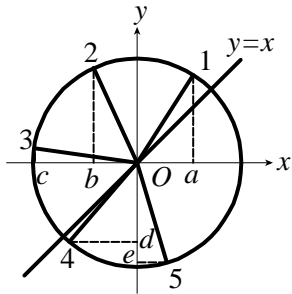


解答

$$a > b > d > e > c$$

解析

如圖, $c < e < d < b < a$, 即 $a > b > d > e > c$ 。



10-2 三角函數的圖形 (常考題型 9)

$f(x) = \sin(1 + \pi x)$, 則 $f(x)$ 之週期為_____。



解答

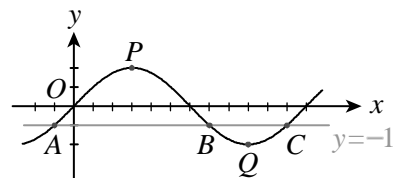
2

解析

$$\text{週期} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

10-2 三角函數的圖形 (常考題型 10)

如圖，已知 $a > 0$, $b > 0$ ，函數 $f(x) = a\sin bx$ 的圖形通過最高點 $P(3, 2)$ 及最低點 $Q(9, -2)$ ，且與直線 $y = -1$ 交於 A, B, C 三點，求(1) a, b 的值。(2) \overline{AB} 的長。(3) \overline{BC} 的長。



解答 (1) $a = 2, b = \frac{\pi}{6}$; (2)8; (3)4

解析 (1)因為 $f(x)$ 的最大值為 2，最小值為 -2 ， $a > 0$ ，所以 $a = 2$ 。
又因為 $f(x)$ 的週期為 $2(9 - 3) = 12$ ， $b > 0$ ，所以 $\frac{2\pi}{b} = 12$ ，即 $b = \frac{\pi}{6}$ 。

(2)由(1)得 $f(x) = 2\sin \frac{\pi}{6}x$ ，令 $2\sin \frac{\pi}{6}x = -1$ ，則 $\sin \frac{\pi}{6}x = -\frac{1}{2}$ 。

由 $\frac{\pi}{6}x = -\frac{\pi}{6}$ ，解得 $x = -1$ ，即 $A(-1, -1)$ ；由 $\frac{\pi}{6}x = \frac{7\pi}{6}$ ，解得 $x = 7$ ，即 $B(7, -1)$ 。故 $\overline{AB} = 7 - (-1) = 8$ 。

(3)由 $\frac{\pi}{6}x = \frac{11\pi}{6}$ ，解得 $x = 11$ ，即 $C(11, -1)$ 。故 $\overline{BC} = 11 - 7 = 4$ 。

10-2 三角函數的圖形 (常考題型 11)

$y = 4\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6})$ 之圖形是由 $y = 4\cos \frac{x}{2}$ 之圖形向 x 軸正方向平移

_____。



解答 $\frac{\pi}{3}$

解析 $y = 4\cos(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}) = 4\cos[\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3})]$

\therefore 向 x 軸正方向平移 $\frac{\pi}{3}$ 。

10-2 三角函數的圖形 (常考題型 12)

函數 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$ 的對稱軸為 $X = \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \pi$,

求 $\alpha =$ _____ .



解答

0 或 $\frac{\pi}{2}$

解析

$$y = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$$

∵ 對稱軸在極大或極小值點

∴ 令 $2x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ 或 $2x + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = 0$ 或 $\frac{\pi}{2}$.